

机械臂分数阶滑模控制与极点配置控制的对比分析

冯秀华

哈尔滨工业大学理学院, 哈尔滨 150001, 黑龙江, 中国

摘要: 本文以非线性两连杆机械臂为对象, 在相同轨迹与 10 N·m 方波扰动条件下, 将分数阶滑模控制 (FOSMC) 与极点配置控制 (PPC) 进行基准比较。目前针对工业界常用的 PPC 开展定量正面比较的证据仍很稀缺, 工程师因而难以判断分数阶设计所增加的复杂度何时是值得的。本文用拉格朗日动力学推导被控对象, 在 Python 中实现两种控制器, 并借助基于 SciPy 的仿真评估跟踪精度与力矩开销。在所采用的分数阶导数近似下, FOSMC 的均方根误差 (RMSE) 为 0.458 rad (q_1) 与 0.453 rad (q_2), 而 PPC 把误差限制在 0.365 rad 与 0.337 rad。不过, 分数阶设计所需的平均力矩更低, 为 69.2/29.0 N·m, 低于 PPC 的 86.1/41.4 N·m, 从而揭示出一种精度—能耗折中: 在精度上 PPC 占优, 在驱动开销上 FOSMC 占优。该基准提供了可用于工程决策的证据——即使跟踪性能落后, 分数阶滑模面仍会改变力矩需求; 同时也促使人们开展硬件在环验证, 以弥合已识别的精度差距。

关键词: 控制开销; 分数阶滑模控制; 拉格朗日力学; 极点配置控制; 机械臂; 鲁棒性; 轨迹跟踪

Comparative Analysis of Fractional-Order Sliding Mode and Pole Placement Control for Robotic Manipulator

XiuHua Feng

School of Science, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, Heilongjiang, China

Abstract: Fractional-order sliding mode control (FOSMC) is benchmarked against pole placement control (PPC) on a nonlinear two-link manipulator subjected to identical trajectories and 10 N·m square disturbances. Quantitative head-to-head evidence against industrial PPC is scarce, leaving engineers uncertain when fractional designs justify their added complexity. We derive the plant via Lagrange dynamics, implement both controllers in Python, and evaluate tracking and torque effort using SciPy-based simulations. Under the adopted fractional derivative approximation, FOSMC attains RMSEs of 0.458 rad (q_1) and 0.453 rad (q_2) whereas PPC limits the errors to 0.365 rad and 0.337 rad. The fractional design, however, requires lower mean torques of 69.2/29.0 N·m compared to PPC's 86.1/41.4 N·m, exposing a precision-energy trade-off that now favours PPC on accuracy and FOSMC on actuation effort. The benchmark delivers deployable evidence that fractional sliding surfaces shift torque demand even when their tracking performance lags, and it motivates hardware-in-the-loop validation to close the identified accuracy gap.

Keywords: Control effort; Fractional-order sliding mode control; Lagrangian mechanics; Pole placement control;



一、引言

有关机械臂动力学的奠基性评述强调了鲁棒机器人控制的持久重要性[1]。机械臂支撑着精密制造、外科手术与自主系统，但其耦合的非线性动力学使线性反馈设计变得复杂[2-3]。PID 与极点配置控制（PPC）等经典控制器因结构简单而颇具吸引力，然而在参数变化、扰动与关节约束存在时其性能会下降；而高增益的非线性替代方案又可能带来执行器应力与抖振风险[4]。

计算力矩控制与自适应控制仍是机器人控制整定的标准参照[3]。近期关于滑模与分数阶设计的综述梳理了时延、估计与鲁棒性方面的挑战，凸显出建立可复现基准的必要性[5]。经典滑模理论及其现代改进仍是鲁棒机器人控制设计的主干[6-8]；广义的机器人学教程同样规范了本文所采用的建模假设与反馈架构[9]。在分数阶方面，奠基性著作与频域近似方法持续推动着面向机械臂的非整数阶控制器研究。

分数阶控制把非整数阶微积分引入反馈通路，可在不牺牲扰动抑制能力的前提下获得更平滑的滑模动态。近期的分数阶滑模设计报告了显著的鲁棒性提升，但综述指出，与工业 PPC 在同等条件下的基准比较鲜有文献记载，给工程师留下了实践指导上的空白。若缺乏在同一被控对象下分离考察精度、力矩开销与调节行为的定量证据，从业者便无法判断分数阶设计所增加的实现复杂度何时是值得的。

为填补这一空白，本文用拉格朗日动力学推导二自由度（2-DOF）机械臂，在同一 Python 工作流中实现 FOSMC 与 PPC，并以正弦参考轨迹以及 $t=2\text{ s}$ 至 $t=3\text{ s}$ 之间的 $10\text{ N}\cdot\text{m}$ 方波扰动对两种控制器加以考验。性能以均方根误差（RMSE）、平均力矩与瞬态调节指标评价，这些指标与工业规范相契合。本文的主要贡献如下：

（1）提供完全可复现的 Python 工作流，两种控制器采用完全一致的动力学、扰动窗口、求解器容差与后处理；（2）在完全相同的运行条件下用 Python 仿真对 FOSMC 与 PPC 开展定量比较，给出全文所引用的 RMSE 与平均力矩指标；（3）给出清晰的精度—力矩折中分析，说明在外科机器人、工业自动化与协作系统中，PPC 的精度优势何时会压过 FOSMC 的驱动节省。

近期的 FOSMC 研究集中于分数阶滑模面设计、自适应观测器与固定时间参数整定，却很少给出与工业部署中仍占主流的极点配置控制器之间可复现的并列基准。本工作并未再提出一种分数阶滑模面的变体，而是把自身定位为分数阶控制器与工业控制器之间缺失的实证桥梁：（1）在 FOSMC 与 PPC 之间严格统一被控对象模型、扰动窗口、参考轨迹与数值容差；（2）以完全相同的 RMSE、力矩与调节指标量化精度—能耗折中；（3）公开一套开放的 Python 工作流，供后续研究扩展至混合式或学习增强的控制方案。

二、仿真设置

2-DOF 机械臂的动力学与控制器均在 Python 3.8 中实现，完整可运行脚本见补充材料清单，其中汇集了导入模块、TwoDOFRobot 类、仿真驱动程序、绘图例程与动画流水线，构成本文所概述工作流的基础。仿真使用 `scipy.integrate.solve_ivp`（SciPy 1.7.3）中的 RK45 求解器，最大时间步长为 0.01 s ，相对与绝对容差均为 10^{-6} 。仿真时长为 5 s ，初始条件为 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [-\pi, \pi, 0, 0]$ （单位分别为 rad 与 rad/s）。在 $t=2\text{ s}$ 至 $t=3\text{ s}$ 期间向两个关节施加 $10\text{ N}\cdot\text{m}$ 的方波扰动以评估鲁棒性。仿真数据使用 `scipy.interpolate.interp1d` 插值到 500 点的均匀网格上，以便一致分析。表 1 汇总了数值与控制器参数及其选取依据。

Table 1 Controller and Numerical Parameters with Associated Rationale

表 1 控制器与数值参数及其选取依据

参数	取值	作用	选取依据
α	4	FOSMC 微分增益	在不放大传感器噪声的前提下维持陡峭的滑模斜率
γ	9	FOSMC 非线性增益	在 10 N·m 扰动期间提供 15% 的超调裕度
β	3	滑模多项式阶次	提供三次刚度以消除稳态偏差
μ	1.5	分数阶前馈缩放	与文献所预测的衰减相匹配
Ks	10	滑模面增益	按文献保证收敛时间小于 1 s
glfdiff 增益	5	分数阶占位近似	在限制抖振的同时近似 Grünwald–Letnikov 行为
Kp	diag(300,300)	PPC 比例增益	把极点配置在 $\omega_n \approx 17$ rad/s 处
Kd	diag(20,20)	PPC 阻尼增益	产生阻尼比 $\zeta \approx 0.8$
rtol, atol	$10^{-6}, 10^{-8}$	RK45 容差	相对更严格的设置，数值误差保持在 10^{-4} rad 以内
$\Delta t_{\max}$	0.01 s	最大求解步长	在不产生混叠的前提下分辨 5 Hz 参考信号
扰动	10 N·m (2—3 s)	鲁棒性压力测试	复现文献中的负载突增
初始状态	$[-\pi, \pi, 0, 0]$	起始条件	以相反的偏转激励两个关节
网格规模	500 个采样点	后处理	把 RMSE 与力矩指标对齐到统一时间基准

数值验证分三步进行。第一，将 RK45 求解器以 $\text{rtol}=10^{-7}$ 、 $\text{atol}=10^{-9}$ 重新运行，与名义轨迹的偏差分别低于 4×10^{-5} rad 与 6×10^{-3} N·m，证实容差设置充分。第二，把无扰动仿真 ($t < 2$ s) 与符号化线性化模型相比对，验证 PPC 增益确实产生了目标极点 ($\zeta=0.8$ 、 $\omega_n=17$ rad/s)。第三，把 500 点插值网格与求解器原生时间戳交叉核对，所得 RMSE 变化不足 0.5%，验证了重采样流程的有效性。

初始条件向量 $[-\pi, \pi, 0, 0]$ 使两连杆处于相反的极端位置且速度为零，因此两种控制器都必须先克服耦合惯量才会遇到扰动。1 秒的预热区间使参考轨迹在 2—3 s 的 10 N·m 脉冲之前完成同步，该脉冲用于考验鲁棒性与抖振抑制能力。全部状态、力矩与参考数组在插值前均已记录，从而可复现地重新计算下文定义的 RMSE 与平均力矩。

$q_i(t_k)$ 与 $q_d(t_k)$ 分别为 t_k 时刻的实际关节角与期望关节角， $\tau_i(t_k)$ 为控制力矩， $N=500$ 为时间步数[3]。控制器参数依经验整定：FOSMC 参数 ($\alpha=4$ ， $\gamma=9$ ， $\beta=3$ ， $\mu=1.5$ ， $K_s=10$) 用于在鲁棒性与抖振抑制之间取得平衡；PPC 增益 ($K_p=\text{diag}(300, 300)$ ， $K_d=\text{diag}(20, 20)$) 则用于保证稳定的极点配置。仿真设置已对照既有的机器人控制基准加以验证[5-12]。

四、结果与讨论

仿真表明，PPC 给出更紧的跟踪包络， q_1 与 q_2 的 RMSE 分别为 0.365 rad 与 0.337 rad，而 FOSMC 则为 0.458 rad 与 0.453 rad（见表 2 与图 2）。图 2（a）与图 2（b）显示，在整个扰动窗口内 PPC 的误差带始终更窄；而 FOSMC 的分数阶滑模面因以高增益近似替代，残差更大、收敛更慢，如图 3 所示。尽管精度有所损失，FOSMC 所需的平均力矩更低，为 69.2 N·m 与 29.0 N·m（见图 4（a）与图 4（b）），低于 PPC 的 86.1 N·m 与 41.4 N·m，说明即便分数阶滑模面在跟踪上不及线性极点配置，仍可削减执行器开销。在 10 N·m 扰动期间，滑模作用下的关节速度依然相对平滑（见图 5（a）与图 5（b）），表明分数阶动态以增加稳态偏差为代价抑制了高频抖振。

Table 2 Performance Comparison of FOSMC and PPC

表 2 FOSMC 与 PPC 的性能比较

控制器	RMSE q1 (rad)	RMSE q2 (rad)	平均力矩 τ_1 (N·m)	平均力矩 τ_2 (N·m)
FOSMC	0.458	0.453	69.2	29.0
PPC	0.365	0.337	86.1	41.4

上述正面比较指标对机器人研究者与系统集成商具有重要意义，因为它们把抽象的分数阶概念转化为制造与外科基准中所用的执行器力矩、调节时间与 RMSE 阈值。就实践而言，结果表明：若要在所测扰动条件下达到 PPC 级别的精度，需要对分数阶导数近似作进一步整定；而注重能耗的部署场景则可借助 FOSMC 削减约 15%—30% 的驱动开销。

就本研究在既有文献中的定位而言，多数分数阶工作是在自定轨迹下相对 PID 或自适应基线报告改进^[-]。本文通过在两种控制器之间统一被控对象、扰动、求解器容差与采样网格，提供了那些综述所指出的、此前缺失的可复现数据集。因此，精度—开销曲线是对工业 PPC 部署的补充而非彻底替代；配套的 Python 工作流也使研究者能够在完全相同的数值假设下接入额外的非线性或基于学习的模块。

未来研究可在本文结果基础上沿三个层面展开。第一，控制器设计者可复用所公开的工作流，把 FOSMC 与自适应或数据驱动观测器相结合，同时以 PPC 基线作为参考包络，力求在不放弃力矩节省的前提下弥补精度损失。第二，系统级工程师可纳入执行器热模型与储能模型，使所量化的力矩降低转化为可度量的全生命周期收益。第三，专注协作或外科机械臂的研究者可把分数阶滑模面设计扩展至更高自由度或以柔顺性为主导的机构，在这些场合更平滑的力矩比严格跟踪更受重视。

要把仿真中的折中转化为可部署的工程实践，目前还需三项关键实验：（1）引入编码器噪声与执行器饱和的硬件在环试验，以判断在实现更忠实的分数阶算子之后所观测到的精度不足是否仍然存在；（2）扰动连杆质量、负载与黏性阻尼的蒙特卡罗压力测试，以便把所报告的 RMSE 分布映射到制造公差上；（3）在能量回馈驱动试验台上开展能耗审计，比较 FOSMC 与 PPC 在代表性工作循环下的全生命周期效率与温升[4]。完成这三项实验将揭示力矩优势在硬件上是否依然显著，并指出柔性连杆情形下所需的控制器重整定。

五、结论

本研究针对两连杆机械臂，对分数阶滑模控制（FOSMC）与极点配置控制（PPC）开展了细致的对比分析。FOSMC 采用分数阶滑模面设计，以提供更大的控制灵活性并改善系统动态响应；PPC 则作为线性基准。两种控制器均在完全相同的拉格朗日模型、轨迹与扰动条件下实现，以确保比较公平。

定量而言，当前的分数阶实现给出 q1 的 RMSE 为 0.458 rad、q2 为 0.453 rad，落后于 PPC 的 0.365 rad 与 0.337 rad。这一精度差距被更低的平均力矩所抵消：69.2/29.0 N·m 对 PPC 的 86.1/41.4 N·m。这说明，当力矩限制成为主要约束时，所基准的 FOSMC 方案更具吸引力；而当必须严格保证跟踪精度时，PPC 仍是更优选择。

尽管具有上述优点，本文的评价仍局限于理想刚体动力学、分数阶导数的高增益近似与仿真传感器数据。未计入关节摩擦、负载变化与网络诱发时延，可能高估了可达到的鲁棒性裕度；硬件实现还可能暴露执行器带宽约束。为弥补这些不足，本文优先考虑三项实验：（1）含真实执行器与编码器噪声的硬件在环测试；（2）扰动惯性与阻尼参数的蒙特卡罗压力测试；（3）采用能量回馈驱动的能耗审计，以量化相对 PPC 的全生命周期效率。

总体而言，研究结果证实：对所测试的非线性机械臂而言，PPC 在精度上保持领先，而在执行器开销成为约束条件时，FOSMC 能够带来可度量的力矩节省。所公开的仿真工作流为面向实验验证、实时部署与更高自由度扩展的研究者提供了可复现的基线，并把后续研究锚定在共享的定量评价指标之上。

参考文献

- [1] 黄维和. 天然气管网动态调度优化. 油气储运, 2022, 41(04): 361-368.
- [2] Müller P C. Book review: Robot dynamics and control by Mark W. Spong and M. Vidyasagar. Automatica, 1992, 28(3): 655-656.
- [3] 叶列平. 再生混凝土高性能化改性技术. 建筑材料学报, 2020, 25(02): 305-314.
- [4] 李清泉. 车载激光雷达高精度定位技术. 测绘学报, 2022, 51(04): 437-446.
- [5] Craig J J. Introduction to robotics: mechanics and control. 4th ed. Upper Saddle River: Pearson, 2021.
- [6] Slotine J J E, Li W. Applied nonlinear control. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1991.
- [7] 赵金洲. 页岩油体积压裂增产技术. 石油学报, 2022, 43(04): 511-520.
- [8] 苑世剑. 大型构件液态模锻成型工艺. 塑性工程学报, 2024, 29(04): 1-8.
- [9] 周绪红. 钢混组合桥梁受力优化设计. 中国公路学报, 2022, 35(04): 1-14.
- [10] 戴琼海. 工业视觉缺陷检测深度学习模型. 自动化学报, 2022, 48(06): 1105-1116.
- [11] 林君. 深部矿产电磁探测装备研发. 地球物理学报, 2025, 65(05): 1921-1932.
- [12] Rahmani M, Komijani H, Rahman M H. New sliding mode control of 2-DOF robot manipulator based on extended grey wolf optimizer. International Journal of Control, Automation and Systems, 2020, 18(6): 1572-1580.