

初等与中等教育中的几何变换与对称：1990 年至今的主题、媒介与理论框架综述

钱媛媛

重庆大学经济与工商管理学院, 重庆 400044, 中国

摘要：初等与中等教育需要更多地关注几何变换与对称，也需要更多研究来支撑几何变换的教与学。为了识别未来研究与教学的方向，本文尝试系统梳理已有研究的版图，并指出当前的关键着力点与未来的机会所在。为此，本系统综述考察了 1990 年以来关于二维几何变换与对称之教与学的 62 篇同行评议论文。综述以“系统综述与元分析优先报告条目”（PRISMA）方案为指引，围绕四个方面展开：（a）学生如何学习变换；（b）变换教学是如何被概念化的；（c）媒介如何被用以支持变换的学习；（d）研究采用了哪些理论框架，这些框架又如何随时间变迁。讨论与结论部分指出了该领域未来若干关键的生长点，以更好地支持教师的教与学生对称与变换的学习。

关键词：对称；变换；数学教育；几何变换；系统文献综述

Geometric Transformations and Symmetry in Primary and Secondary Education: A Review of Themes, Media, and Theoretical Frames from 1990 to Present

YuanYuan Qian

School of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400044, China

Abstract: There is need for increased focus on geometric transformations and symmetry in primary and secondary education, as well as increased research to support learning and teaching of geometric transformations. To identify directions for future research and teaching, we set out to map the research that has already been conducted and to identify key areas of focus and opportunity going forward. Toward these goals, this systematic review examines 62 peer-reviewed articles on teaching and learning about 2D geometric transformations and symmetry since 1990. To guide our review, we use the Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses (PRISMA) protocol. The review explores the research in terms of: (a) how students learn about transformations, (b) how teaching about transformations has been conceptualized, (c) how media have been leveraged to support learning about transformations, and (d) which theoretical frames have been leveraged and how have those frames shifted over time. Discussion and conclusions consider key areas of growth for the field going forward to better support teachers and students learning

about symmetry and transformations.

Keywords: Symmetry; Transformations; Mathematics education; Geometric transformations; Systematic literature review

一、引言

初等与中等教育需要更多地关注几何变换与对称[1-2],也需要更多研究来支撑几何变换与对称的教与学[3]。几何变换与对称为教师和教育工作者提供了开展文化回应性数学体验的机会。这些机会能够祛除复杂数学观念的神秘感,通过提供导航并描述学生自身世界的情境,使这些观念对来自不同背景的学生变得有意义[4]。从历史上看,对称与物理学、生物学等多个学科都有关联,它使学生得以接触几何中那些贯穿其他数学领域乃至 STEM 各学科的大概念[5-6]。

因此,对几何变换与对称做一次系统综述具有多重重要意义。第一,尽管当前的诸多倡议都呼吁在数学教育中更多地关注几何概念,以拓宽学校数学的观念版图、增强学生对数学与其生活和文化之相关性的感知、并为学生的未来做好数学准备[1,7-10],数学教育界仍在消化一种历史形成的等级秩序——它把代数概念置于比几何概念更本质、更稳固的位置(关于这一等级秩序在数学教育中的危险,参见文献[1]与文献[2]的详尽论证;面向数学家群体的反等级秩序论证,参见文献[11,12])。第二,加深我们对研究之空白、优势与演变的理解,可以为未来研究照亮新的方向,并凸显与研究取径创新、与具有社会意义的认知方式相联结的可能性。

研究者与教育工作者早已认识到几何变换与对称在数学教育中的重要地位[13-15]。不过,这些概念的重要性是随着 1989 年美国全国数学教师理事会(NCTM)“标准计划”的启动才进一步凸显并获得支持的[8,9]。NCTM 的标准计划强调把对称与变换纳入数学课程,并最终通过促进空间视觉化与空间推理来丰富学生的学习经验。与这些加强课程中对称与变换分量的呼吁相呼应,近年的三份报告都强调了这些领域研究的重要性:(a) 国际数学教育大会 ICME-13 报告[16,17];(b) 《数学教育心理学研究第二手册》[3];(c) Bruce 及其同事以“空间推理”为焦点开展的网络分析。三份报告都指出,需要更多聚焦于对称与变换的研究。例如,文献[3]明确指出,在数学教育心理学(PME)研究共同体中,变换几何是一个代表性不足的研究主题。

鉴于文献中的这一空白,我们着手考察 1990 年至今关于变换与对称的研究。本研究之所以以 1990 年为起点,一是为了承认 1989 年 NCTM 标准作为分水岭的重要意义,二是因为在此期间新媒介(包括动态几何环境与可编程环境)开始更易于为教育者所获得,这促使研究者重新思考学习者可能如何在概念层面理解几何变换,并以不同的、创新的理论透镜来安置自己的研究。我们的目标是综合关于学生如何学习、教师如何教授二维几何变换与对称的研究,以推动数学教育中变换几何研究之未来可能性的生成。更具体地说,本综述回答以下问题:1. 关于学生如何理解几何变换与对称,研究已经揭示了什么?2. 关于如何教授几何变换与对称,研究已经揭示了什么?3. 在几何变换与对称的教与学研究中,媒介是如何被使用的?4. 这些研究采用了哪些理论框架,这些框架又如何随时间变迁?

二、系统文献综述的研究方法

(一) 检索策略

为回答上述研究问题,我们依据文献所勾勒的 PRISMA(系统综述与元分析优先报告条目)方案开展了一次系统综述,并特别聚焦于几何变换。虽然 PRISMA 起源于卫生保健学科,但该方案“已被广泛认可与采用,其证据包括:在多家期刊上共同发表、被超过 60000 份报告引用(Scopus, 2020 年 8 月)、获得近 200 家期刊与系统综述机构的背书,以及在各学科中的采用”(文献,第 2 页)。

我们检索了 Academic Search Complete (EBSCO)、ERIC、SCOPUS 与 Web of Science (WOS) 等电子数据库中的英文同行评议学术论文。检索词包括 geometric transformation、geometry transformation、translation、rotation、reflection 与 symmetry, 这些词是依据初等与中等教育各类课程方案中传统上与几何变换相关联的概念选定的[7,9]。

所选研究的标题与摘要按以下标准筛选: (a) 聚焦于二维几何变换的教与学; (b) 讨论了学习理论, 用以理解初等与中等教育阶段的学生或教师如何思考几何变换; (c) 对研究中的环境、工具与活动有充分的描述。最终, 我们得到 62 篇文章纳入本次文献综述。

(二) 检索、筛选与分析流程

检索过程按照文献与文献所提出的系统综述指南分三个阶段进行, 如图 1 所示。第一阶段是识别, 呈现在所有数据库中获得原始命中数(899 条)。若 translation 与 reflection 二词指向其日常义项, 则相应命中被剔除: 前者指变化过程(例如高中生把代数应用题“转译”为数学方程), 后者指思考过程所产生的观念(例如数学教师对技术使用的“反思”)。此外值得注意的是, rotation 一词还会检出与几何和空间推理相关、但聚焦于三维物体(无论实物还是虚拟)心理旋转的结果; 由于我们只关注二维图形, 这些文章被从最终计数中移除。

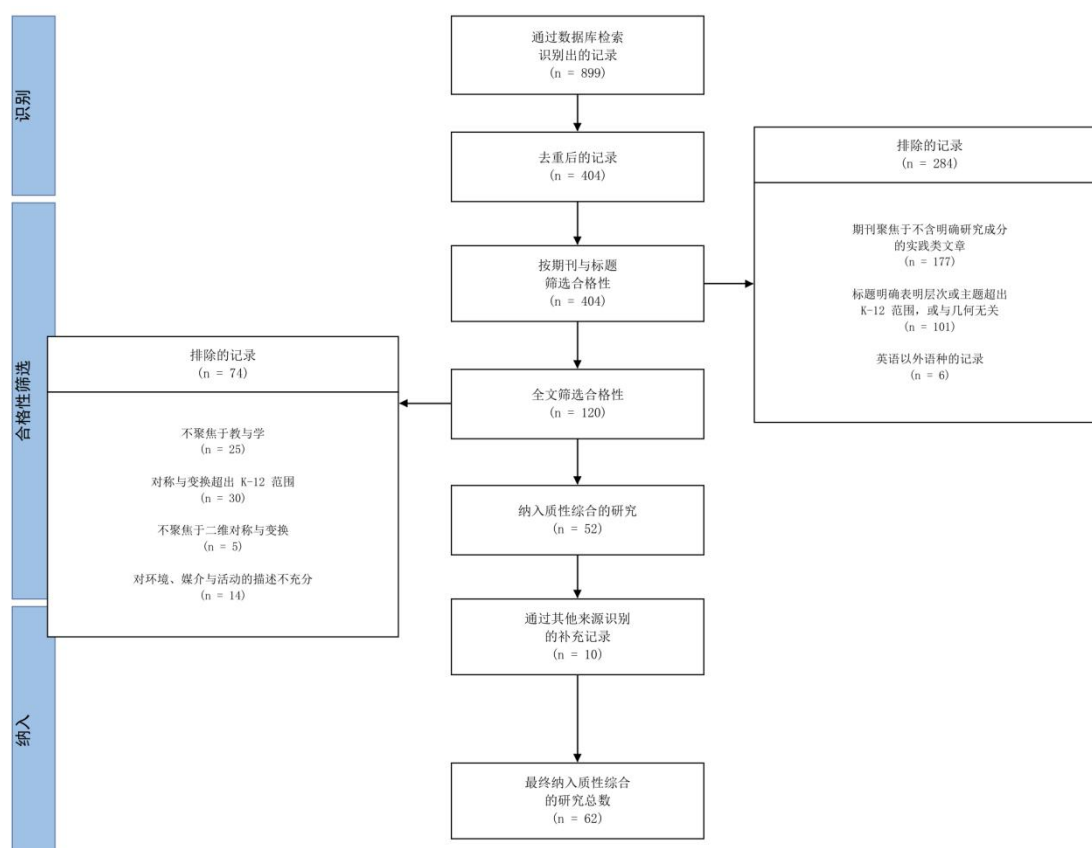


Figure 1 PRISMA Diagram Detailing Identification, Eligibility, and Inclusion

图 1 识别、合格性与纳入的 PRISMA 流程图

第二阶段筛选合格性。在过滤掉重复条目(在各次检索中重复出现的文章)后, 我们对 404 篇文章的标题与期刊名进行了筛查, 并排除具有以下特征的文章: (a) 期刊聚焦于不含明确研究成分的实践类文章; (b) 文章标题明确表明其层次或主题超出初等或中等教育阶段, 或与二维几何无关; (c) 以英语以外语种发表的记录。

第三阶段, 在上述过滤之后, 我们对余下的 120 条命中做了全文审读。如前所述, 为聚焦本综述, 我们把

最终入选的文章进一步限定为同时具备以下要素者：（a）聚焦于二维几何变换的教与学；（b）讨论了学习理论，用以理解初等与中等教育阶段的学生或教师如何思考几何变换；（c）对研究中的环境、工具与活动有充分的描述。被排除的文章可能具备其中一两项要素，但并非全部三项。最终，检索过程产出 62 篇文章。在审读这些文章以识别总体趋势时，我们注意到某些参考文献被反复提及，而它们并未在数据库检索中被识别出来，这说明这些论文对于全面扫描该领域是不可或缺的。文献引用文献指出，为克服质性叙述不充分的局限，“检索策略”应当纳入“回溯参考文献”等“传统的综述方法”（第 1150 页）。据此，我们基于检索所得文章中的引文补充了 10 条记录，合计 62 篇文章。每篇文章都至少由两位作者围绕四个研究问题分别加以考察。

三、研究结果

研究结果对应四个研究问题，分四个主要部分呈现：（a）学生如何理解变换；（b）变换教学是如何被概念化的；（c）媒介如何被用以支持变换的学习；（d）研究采用了哪些理论框架，这些框架又如何随时间变迁。

（一）学生如何理解几何变换

一个占主导地位的主题，是帮助学生把对变换的理解从日常的身体经验推进到更形式化的数学理解。研究通常把这一过程表述为从“运动”理解向“映射”理解的过渡。更具体地说，在所审读的文章中普遍存在这样一种论断：学习者以两种方式理解几何变换——最初是运动观，其后有可能与映射观相整合。这一论断在极为多样的理论话语中都得到映现，例如与文献的操作性 / 结构性二重性、文献的动作与对象视角，以及文献的过程与对象二重性相呼应。本质上，根据既有文献，各年龄段的大多数人都把变换理解为运动。在运动视角下操作的学习者，可能把平面视为背景，并把变换看作对该背景上某个几何图形的操纵。类比（例如用移动的电梯来描述平移）与实物操作可以让几何变换的概念对学习者的变得可及，但这些类比同时也可能成为迷思概念的来源。例如，只持有运动观的人可能认为变换的发生必须有物理的力。同样地，运动观会忽略与每一种变换相关联的重要数学性质与关系。比如，若把反射笼统地理解为“翻折”，就有可能不去考虑与对称轴的垂直性和等距性。最后，运动观在认知上可能是受限的，它会让学习者只能执行诸如平移、翻折、旋转这样的操作性程序。

文献澄清了运动观与映射观的关系，它对比了学习者与数学家看待几何平面的不同方式。该文认为，数学家以隐喻的、形式的、抽象的方式把几何平面概念化为空间中的点集，而学生则常常主要通过其具身的个人经验来直觉地理解平面。总体而言，关于几何变换学习的研究共享一个关键焦点，即学生从日常理解向更形式化的数学理解的过渡。尽管不同理论用不同的理论构念来探索这一二重性（如概念化 / 概念，文献；过程 / 对象，文献；非形式 / 形式，文献；运动 / 映射，文献），但它们都把日常经验视为学生生成形式化理解的起点。

（二）几何变换教学是如何被概念化的

这一主题下的研究凸显了两类取向之间的辩证互动：一类是关于学习轨迹 / 学习进阶的研究，主要与个体认知相关联；另一类是对整合式教学取径的探索，往往强调社会文化与交往的维度。因此我们深入考察这一辩证互动，并承认两个研究领域各自的意义及其进一步推进的潜力。

学者们常用“学习轨迹”一词，有时与“学习进阶”交替使用，来描述“关于一条可能的学习路径的猜想”（文献，第 82 页）以及一组有序的教学任务之设计。例如，文献指出，经实证研究检验的学习进阶可以为教学与评价提供依据。与之相对，另一些更具社会整合性的教学取径主要与共同体中的学习相关联，关注环境与共同体内部的互动。

变换教与学中的一项目标，是理解学习者如何（往往伴随迟疑与反复）从运动观走向映射观。正如文献所描述的，正是学习轨迹中的这种“居间状态”让研究者难以把握。文献提出，在观察几何话语时，运动层次与映

射层次之间的轨迹并非“从一个层次向另一个层次平滑线性地过渡；毋宁说，它涉及在旧的与新的话语形式之间来回摆荡，并由此产生几何交流的中间性混合形态”（第 43 页）。基于这一论断，数学教育学者强调“需要研究几何概念形成进程中的过渡阶段”（文献，第 696 页）。

研究者考察学习轨迹，以判定学生从运动到映射的过渡，同时也承认学生并不遵循线性轨迹。不过，在承认这种非线性与个体差异的同时，学习轨迹 / 进阶取径仍被寄予厚望，例如文献便设计了一套学习进阶，以更广泛地支持教学与评价。一些跨文化研究则着手分析和比较学习进阶在教科书中的文化性运用，如法国与挪威之间的比较、日本与英国之间的比较。总体而言，在记录并理解学习阶段的现实需要（常常出于教学与评价目的）与关注课堂中涌现的复杂生成性之间，似乎存在一场拉锯。文献在检验并最终反驳文献的学习模型时，恰切地描述了这一张力：“课堂生态并非既定之物，而是由参与者持续生成与达成的，因此关于空间（或任何别的东西）的推理之概念变化，很可能取决于学生、教师、任务、工具、对话等等之间互动的动态性质”（第 163 页）。

不过，依据既有文献，学习轨迹对研究者和教师颇有助益：它不仅是评估学习的工具，也有助于形成一份基于研究的教与学蓝图。反过来说，在一些作者看来，透过学习轨迹 / 进阶的透镜来看待数学学习，意味着那些打断关于学习的传统想法、考虑新可能性的机会可能被忽略。有学者建议，以更整合的方式开展研究与课程设计，可以让研究者观察并思考关于变换的学习如何安置在数学大概念的空间之中。文献解释说：“让幼儿接触数学大概念的传统的——也是省事的——办法，是把这些观念切碎到数学结构荡然无存的程度”（第 34 页）。

然而，教师与研究往往依赖学习轨迹来帮助自己思考教什么、怎么教。有研究者指出，其中的挑战在于：为了设计丰富而更具整合性的学习体验，教师需要拥有充分的数学知识，才能为学生构想出富有创造性与独特性的课程体验路径。鉴于相关研究中的许多职前数学教师本人对变换之数学观所内含的抽象映射观念理解并不牢固，他们在开发与实施整合式学习活动时需要支持。教师面临的另一个难题是评价。学习轨迹为教师和研究者提供了结构与焦点，使其得以确定评价什么、何种学习应先于何种学习；而在往往更具生成性的整合式取径中，这一点并不总是容易确定，对于学科知识不够深厚的教师尤其如此。

（三）媒介如何被用以支持几何变换的学习

随着更精密的数字技术的发展，研究者开始考量特定媒介的可供性，并将其采纳、改造以用于各种情境。不同媒介的使用使研究者得以考察范围广阔的问题，从动态几何环境的认知可供性，到促成教师、学生与媒介之关系的社会文化情境。本文综述识别出四大类媒介使用：（1）动态几何环境（如 GeoGebra、Cabri、几何画板）；（2）不需要其他媒介的纸笔书面问题解决活动（如选择题与书面测验和活动）；（3）可编程环境 / 数字工具，使用者给出一系列数学规则，交由一个或多个计算机主体（如 Logo 及相关编程环境）或游戏化身（如教育电子游戏中）执行；（4）实物工具（如描图纸、直尺、圆规、几何三角板与连杆机构）。有四项研究未明确表述其媒介使用。图 2 所显示的总体趋势凸显了数十年间的一次转移：从以可编程环境与数字工具为主，转向更为多样的教学媒介使用。多年来研究对媒介的使用日趋均衡，2020 年代的文章即是例证。鉴于数十年来技术在几何变换与对称研究中的整合程度不断提高，我们认为该领域提供了数字工具与实体工具的独特交汇点，使之成为一个丰富而富有活力的研究领域。

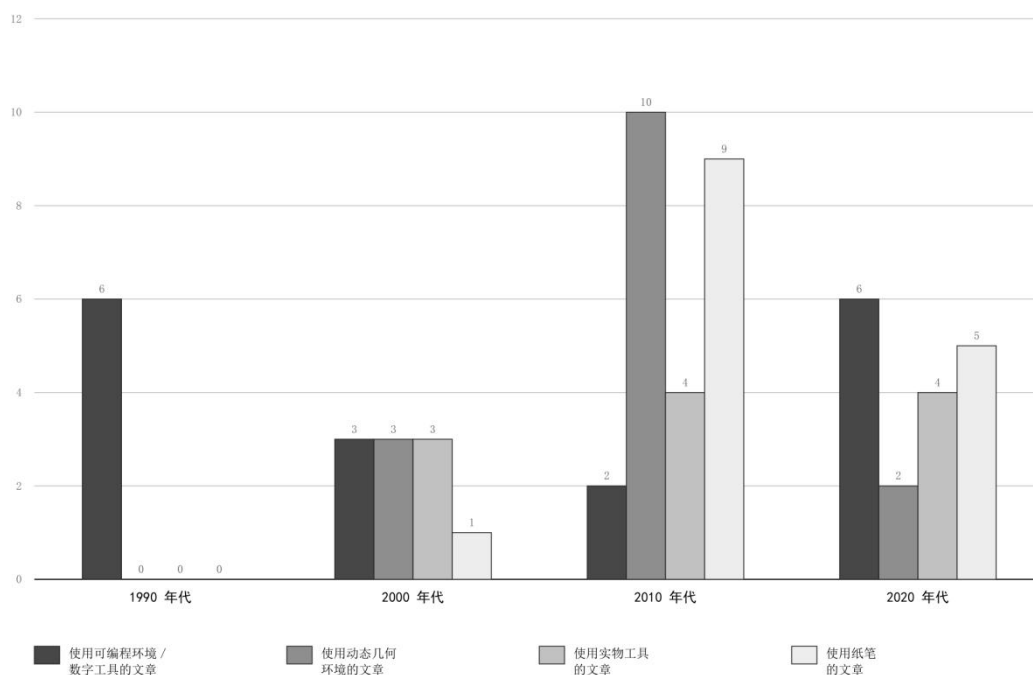


Figure 2 Distribution of Media since 1990

图 2 1990 年以来媒介使用的分布

（四）动态几何环境

尤其是 2010 年代的研究（见图 2），大量使用了动态几何环境，使学生与教师得以探索并建构动态对象。根据既有文献，动态几何环境让学生投入到对几何变换性质的解释与论证之中，同时还提供了若干特有的可供性。文献、文献与文献表明，动态几何环境能就多重表征（如图形表征与代数表征）之间的转换提供即时反馈，从而便于把变换作为函数来研究。

此外，动态几何环境的拖拽功能（对“热点”点的直接、连续操纵）是一些研究者关注的核心，因为它是几何动态性的主要特征，也是与静态的纸笔几何形成的对照。对称与变换研究关注“拖拽检验”（确认图形的某一性质在拖拽下保持不变），这有助于培养欧氏几何中的全等证明技能。不过，这也意味着：拖拽本可以成为学习者探索对象 / 动作之连续运动、从而把几何变换与其既往身体经验相联结的机会，而这一可供性却被忽视了。

（五）纸笔

仅使用纸笔的研究在头二十年中占比偏低，但在 2010 年代与 2020 年代有所增加（图 2）。这一媒介既允许对个体表现进行评估，也提供了一扇窥见学生概念化方式的窗口。纸笔任务的设计通常由课程主导，相关探究常涉及全等的证明，以及纳入那些需要对图像（如笛卡尔平面上的图形或点）进行视觉化的问题。尽管纸笔与动态几何环境都可以通过借助视觉化发展变换的证明与代数性质，把注意力集中于从运动向映射的转变，但二者之间的一项关键差异在于：动态几何的即时反馈特性如何增强了学生的理解。

（六）可编程环境与数字工具

对可编程环境的关注贯穿了两类研究：关于个体认知的研究，以及关于设计环境以支撑变换认知的研究。我们推测，1990 年代初 Logo 各类变体的传播，在建构主义（constructionism）观念与当时研究者所秉持的强认知主义传统的影响下，促成了这一热潮。文献认为，计算环境“体现了数学的某个领域，使其中的数学对象与运算按其形式定义的方式表现”（第 123 页）。确实，这些环境帮助学生建立起对几何变换的初步理解。在所审读的工作中，我们发现可编程环境的一项核心特征，是使用参数化的变换命令来作用于某个图形（例如“Slide

10 -20”是把坐标平面上原点映到点 (10, -20) 的一次平移)。这些研究的一个要害之处在于,学习者在关注复杂或高阶数学观念时得到了计算思维的协同支撑(例如基于克莱因埃尔朗根纲领的映射观,或文献所研究的群论视角)。研究的重点落在把日常经验与具身经验视为理解几何变换之映射观的有效资源与起点。在这类研究中,计算思维通过算法、抽象、分解、模式识别与概括等“深具数学性”的活动的展开,为数学学习提供了独特的可供性与一条可及的、赋予能动性的路径。

在本次综述中,我们遇到两篇专门关注数字游戏用于学习的论文。文献开发并研究了一个环境,支持学习者用变换的语言来操作七巧板。变换以类似于非正式编程的方式中介了学习者与七巧板各块之间的互动。这提示,游戏(或游戏性)与编程的交汇处,可能是未来变换学习研究的一个方向。文献近期发表的研究表明,一款融合几何变换与计算思维的数字游戏如何支持学生整合日常概念与形式概念,其方式与文献关于“儿童自发概念之发展”的观点相契合(第 193 页)。

在本综述覆盖的时间跨度内,可编程环境因其能向学习者提供即时反馈而受到关注,这支撑了一种具身视角:它以学生对运动的个人经验为依托,转变了学生关于几何变换的认知与理解。

(七) 实物工具

实物工具经常与其他媒介组合出现。计算环境与数字工具的研究倾向于关注媒介与参与者之间的个体关系,而使用实物工具的研究则更倾向于社会与集体的取径。纳入实物工具的研究常常考察学习者与教师协同工作时工具的文化中介作用。我们所分析的文章往往把数字媒介(动态几何环境)与实体媒介(纸笔、几何工具)结合使用。文献指出,组合使用多种媒介意味着“一种协同作用将以这样的方式展开:每一项活动都会增益其余所有活动的学习潜能”(第 1173 页),这强调了每一种媒介如何通过不同的可供性参与到理解的促成之中,以及媒介之间的协同如何催生涌现性的几何学习——正如《Digital Experiences in Mathematics Education》的一期专刊所凸显的那样。

(八) 研究采用了哪些理论框架,这些框架又如何随时间变迁

我们依据文献所编制的学习话语图谱来分析各篇文章所采用的理论框架,该图谱综合了教育领域约九百种理论框架;同时也借重文献的大量工作,该书深入探讨了研究认识论与学习理论在课堂中的概念化及其意义。在这一步骤中,我们采用三阶段核验流程,依据理论框架对文章进行聚类。该流程首先是对学习话语以及几何教育领域的其他综述做一次全面考察。随后按以下标准对文章分组:(1)明确提及使用同一理论的文章被归为同一框架;(2)使用不同理论但对学习或教学面向的关注相近的文章被合并(例如“动作—过程—对象—图式”APOS 理论与“概念化—认识—概念”(cKc)模型被合并为单一框架);(3)使用多个理论焦点的文章被置于最契合其所呈现观念的框架中——因而有可能被同时纳入多个框架。

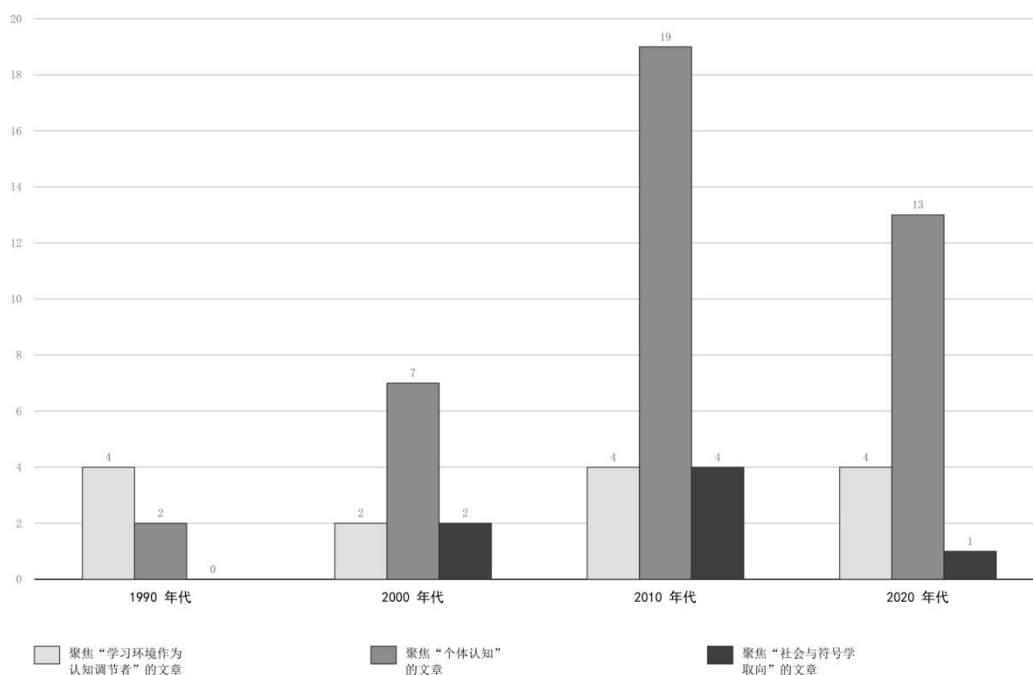


Figure 3 Distribution of Theoretical Frames since 1990

图 3 1990 年以来理论框架的分布

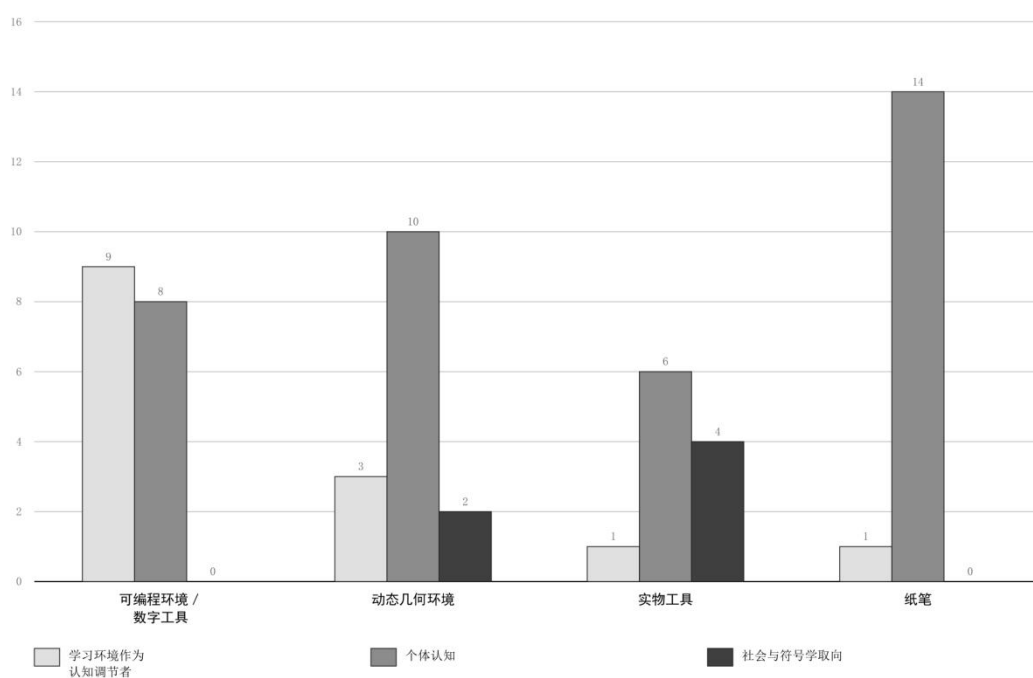


Figure 4 Distribution of Media by Theoretical Frames

图 4 各理论框架下媒介使用的分布

接下来的流程是全体作者就文章归入各框架的位置展开讨论与辩论，并对各框架内文章的归属做了若干次调整，直至达成共识。分析产出三个统摄性的理论框架：（a）个体认知；（b）学习环境作为认知调节者；（c）社会与符号学取向。由于个体认知框架下的文章数量极大，我们又依据三个实质性的焦点对该框架内的文章做了组织。

表 1 给出各框架的定义。表 2 呈现 62 篇被审读文章归入各框架的聚类情况。表 3 给出按理论框架与媒介编码的摘录示例。图 3 呈现各年代框架的分布，图 4 则呈现按理论框架划分的焦点媒介分布。

Table 1 Theoretical Frames

表 1 理论框架

框架	说明
个体认知（下含三个构成性焦点）	归入本框架的文章常采用与建构主义理论相关联的认知视角。这些研究把学习与知识视为持续变化的过程，以及从个体视角出发对概念关系的建构。
·学习的障碍	这些文章探究可能妨碍学习者理解某一概念的障碍，从认知或概念的角度理解学习过程，常常着眼于学习者如何把其经验性知识运用于数学学习。
·学习的过程与层次	这些文章常运用“几何思维层次”模型（如文献、文献），以探究学科知识与学习路径，进而分析学生的概念发展并评估学习。
·教师的学习与自主性	这些文章讨论教师如何以能动的方式引导自身的学习经验，从而应对某些学校教育模式中刻板而使人疏离的方面。文章探究了教育者如何为自己的探究、资源与时间管理承担责任。
学习环境作为认知调节者	归入本框架的文章聚焦于分析：在探索与建构外部对象（如图画、计算机程序、三维模型等）时，是什么触发了变化；并把经验与非形式知识视为发展几何变换理解的根本组成部分。
社会与符号学取向	归入本框架的文章采用参与式的、文化情境化的取径，常运用符号中介理论，对教学的关注更为显豁。同样重要的还有工具的情境化与分布式使用，其范围从“词汇与话语”（文献，第 157 页）到“那些使人得以知与行、同时又限制并以别种方式引导知与行的人工物、结构与习惯”（第 142 页）。

Table 2 Articles Clustering Distribution by Code

表 2 按编码划分的文章聚类分布

理论框架（编码）	所属文献
个体认知（n=41）——(a) 聚焦学习障碍（n=20）	、 、 、 、 *、 、 、 *、 *、 、 、 *、 、 、 、 *、 、 、 [6]
个体认知（n=41）——(b) 学习过程与路径（n=10）	、 *、 、 *、 、 、 、 *、 、 、 、
个体认知（n=41）——(c) 教学框架（n=11）	*、 *、 *、 、 、 、 、 、 、 、 、 、
学习环境作为认知调节者（n=14）	、 、 、 、 、 、 、 、 、 、 、 、 、
社会与符号学取向（n=7）	、 、 、 、 、 、 [4]

Table 3 Examples of Coded Excerpts for Theoretical Frames and Media

表 3 按理论框架与媒介编码的摘录示例

研究	框架	理论取径	编码摘录	媒介
文献	个体认知（学	van Hiele 学	“协方差分析结果显示，实验组不仅在学	动态几何环

(2012)	习过程)	习层次	业成绩上、而且在变换几何的学习层次上	境
文献 (2009)	个体认知 (障 碍)	具身认知	都优于对照组。”(摘要, 第 364 页) “在本章中, 我描述了具身数学的理论, 并运用一种关于数学思维的具身视角, 来 分析学生在学习变换几何过程中的经验 数据。”(第 29 页)	可编程环境
文献 (2014)	个体认知 (教 师学习)	学科教学知识 (PCK)	“本文源于我们希望更多地了解职前教师 在几何这一特定领域——对称——中的 PCK。我们着手考察小学职前教师对学生 反射对称错误的解读与回应, 及其与自身 知识的关系。”(第 34 页) “计算机可以扮演更有能力的他者的角 色”, 这“与维果茨基(1978)的理论相呼 应: 儿童发展的每个阶段都由一个实际发 展水平和一个潜在发展水平所刻画, 儿童 只有在帮助之下才可能发挥其潜在发展 水平”(第 32-33 页)	纸笔
文献 (2018)	环境作为认知 调节者	维果茨基最近 发展区	“一个符号系统的特征在于: 一组基本符 号、一组关于符号之生成与变换的规则, 以及一种源自系统内符号之间关系的底 层意义结构”(第 29 页)	可编程环境
文献 (2012)	社会与符号学 取向	符号系统		实物工具

（九）理论框架之一：个体认知

最大的一部分文章（62 篇中的 41 篇）聚集于个体认知这一理论框架之下，且该框架的主导地位随时间不断上升。无论是该框架下文章的绝对数量，还是其相对于其他框架的占比，都在逐个年代增加（见图 3）。归入本框架的文章常采用与建构主义理论相关联的认知视角，把学习与知识视为持续变化的过程，以及从个体视角出发对概念关系的建构。在媒介方面，本框架的文章最集中于动态几何环境与纸笔，对可编程环境与实物工具的强调相对较少（见图 4）。在个体认知这一统摄性框架之内，浮现出三个焦点：（a）关注可能妨碍学习者理解某一概念的障碍；（b）关注学习变换时所使用的过程与取径；（c）关注在职前与在职教育中促进教师学习与自主性的教学框架。

关注“可能妨碍学习者理解某一概念之障碍”的文章，从认知或概念的角度理解学习过程，常常着眼于学习者如何把其经验性知识运用于数学学习。具体而言，我们指的是个体学习者从直觉理解（如把变换视为运动）走向更形式化的数学概念理解（如把变换视为函数、视为平面到自身的映射）的那些过程。

这些文章往往游走于两种几何学习传统之间。第一种传统聚焦于几何的形式化图景，认为把变换看成在具体物体上产生运动的动作，可能导致全等证明上的困难。第二种传统聚焦于这样一种几何图景：被变换对象的运动引导认知与概念理解走向对平面的“映射”观。文献指出，基于克莱因埃朗根纲领的映射观“把几何的焦点从具有具体的、可视化指称的特定对象（点、线、面等），转移到不变性、群论与映射等观念上”（第 4-5 页）。例如，文献观察了学习者在物理世界经验与映射观之建构（如把运动理解为向量）之间的过渡。

各篇文章都强调了学习者带入变换几何学习的非形式资源的优势与局限，尤其是：（a）学习者朴素的、基

于经验的知识可作为理解变换的一组资源；（b）学习者的非形式知识与可视化可能成为理解形式数学概念的障碍；（c）学习者对数学概念的解释常常取材于日常情境，这可能在非形式知识与形式知识之间制造张力，从而既可能是理解的绊脚石，也可能是理解的手脚架（例如用制陶课来学习反射，文献）。

关注“学习变换时所经历的过程与路径”的文章，常运用“几何思维层次”模型来表征学科知识与学习路径、分析学生的概念发展并评估学习。这一研究领域强调，例如文献的模型与文献的几何工作空间等几何模型提供了一副脚手架，把学习进阶框定为若干层次，从“容易的”出发，逐步走向更“复杂的”（符号化的）理解。又如，文献运用 Pirie-Kieren 模型，凸显了学生在依托经验性知识建构形式理解（映射与记号）的过程中如何来回往复，其中的关键要素是操作教具与变换之多重表征的使用。

关注“支持教师学习与能动性之教学框架”的文章，讨论了教师如何以能动的方式引导他们为学生创设的学习经验，从而应对某些学校教育模式中刻板而使人疏离的方面。两个重要框架——最初的学科教学知识（PCK）框架，及其随后在技术学科教学知识（TPACK）框架上的拓展——指出了教学这一复杂行动所需的不同知识体系。这一以教师为焦点的文献领域，其关键强调包括：（a）职前教师有限的学科知识与教学知识妨碍了他们获取处理学生错误与迷思概念的实践知识（know-how），因为他们自身就不曾有过通过犯错来学习的机会；（b）参与实施与反思有助于教师以新的方式理解几何；（c）技术使用方面的培训与支持，以及教学法的发展，必须与数学知识和动态几何环境的运用结合起来。

（十）理论框架之二：学习环境作为认知调节者

一个较小的文章集群（原文表述为 62 篇中的 11 篇，与表 2 及图 3 中的 14 篇不一致，详见交付说明）指向这样一个过程：与学习环境的互动改变了认知。归入本框架的文章聚焦于分析：在探索与建构外部对象（如计算机程序、图画、三维模型等）时是什么触发了变化；并把经验与非形式知识视为发展几何变换理解的根本组成部分。本框架下的对称与几何变换研究大多具有建构主义（constructionism）性质，学习者被认为是在“主动投入于制作某类外部人工物”时建构观念的（文献，第 1 页）。这些建构主义话语通常聚焦于可编程环境，或曰微世界，但也纳入了其他媒介（图 4）。使这些文章区别于第一个框架的，是它们对学习环境自身作为认知调节者之适应性的关注。本框架下的文章数量在数十年间保持相对稳定（见图 3）。研究的具体焦点强调：

（a）运用数字媒介推进学习者对变换相关数学概念的理解，常聚焦于把平面映射为点集、反射以及概念性挑战（例如理解向左旋转 270° 与向右旋转 90° 是同一回事）；（b）在计算机环境中促进数学策略（如利用反馈纠正过度概括）；（c）发展基于问题的教学法，以帮助学生用动态几何来构造证明、用辅助线来解决几何问题；（d）支持教师开展意义建构的话语与论证；（e）创造数学的与计算的社会共享经验，使对称与变换成为数学大概念（如群论）发展的通道。

（十一）理论框架之三：社会与符号学取向

最小的一组文章——62 篇中仅 7 篇——聚集于参与式的、文化情境化的取径。不过，具有这一关注点的文章自 2010 年以来其重要性有所上升（图 3）。归入本框架的文章采用参与式的、文化情境化的取径，常运用符号中介理论，对教学的关注更为显豁。同样重要的还有工具的情境化与分布式使用，其范围从“词汇与话语”（文献，第 157 页）到“那些使人得以知与行、同时又限制并以别种方式引导知与行的人工物、结构与习惯”（第 142 页）。本框架尤其凸显了教师在组织与结构化学习、并赋能学生回应自身学习需要方面的作用。

这些文章按照学习者如何通过符号与记号建构数学概念之意义而聚为一类。教师作为中介者扮演了重要角色，充当意义建构的向导。本部分的多数研究关注运用人工物的活动，因为符号中介理论直接处理人工物（如圆规或教育软件）与教师在学习中所扮演的文化中介角色。在媒介方面，这些研究主要聚焦于实物工具，但也

纳入了动态几何环境（见图 4）。

关键的话语侧重包括：（a）媒介、学生与教师之间富有后果的相互联结；（b）实体人工物与数字人工物之间生成的协同，被视为符号中介与数学学习的本质面向；（c）儿童与教师的手势、图示与话语中的实质性意义[105,107]；（d）符号表征各语域之间的转换，其焦点在于发展视觉表征与代数表征之间的关系。那些探索文化回应性意义建构的研究，则提示了思考知识如何通过集体与文化过程演化的新方式。

四、讨论

过去三十年的文献呈现出清晰的聚类，这提示该领域集体研究议程在演变过程中形成了涌现的、或许并非有意的重心分布（图 3）。这一分布表明，以个体认知为焦点的理论取向在三十年间日益主导研究，这既显示了认知主义研究的深远影响，也显示了社会与符号学视角较晚近的兴起与影响力上升。

为了理解该领域今日的处境，本文综述聚焦于 1990 年代初至今的研究。早在 1990 年之前，文献提出的问题至今仍居核心：学生是怎样思考变换的？或许，通过重新思考方法论与概念取径，我们可以更完整地理解学生如何学习、教师又可以如何教授变换。我们的分析凸显了这样一类研究的潜力：它们运用技术来支持数学思维与学习，调动那些可以与代数理解并肩而立的视觉理解形式。例如，Cabri、几何画板与 GeoGebra 等动态几何环境的出现与使用，使得表征基础设施得以向不那么完全依赖“符号串”与代数形式化的方向转移。若干研究者朝这一方向的努力可为例证，如文献探索基本运算之交互式视觉表征的项目，又如 Kaput 中心聚焦于让变化与变异的数学得以民主化的 SimCalc 系列项目。

（一）展望多元的未来：将文化情境融入几何变换与对称研究

我们所考察的研究多数仍以西方关于数学这一学科的视角为中心。我们的检索只找到一篇论及原住民取径的文章。与此相关，检索中民族数学（ethnomathematics）文章的匮乏，部分原因可能在于它们被归类到教育之外的学科（如人类学）。这凸显了该领域需要更多跨界的、跨学科的研究。特别是，民族数学文献为构想未来的、批判性的研究提供了重要前景，因为它考察了具有文化相关性的元素如何——常常是通过计算环境——支持对几何变换与分形的理解。这项工作可以回应数学教育长期以来对文化根植之认识论的求索（例如各文化如何在日常活动中创造与使用数学，以及原住民视角），并把它们与形式数学以及计算表征联系起来。

（二）超越个体认知：探索变换几何研究中学习的社会面向

科学教育领域当前的工作，也可以为学习轨迹的运用提供借鉴——我们的综述显示，学习轨迹在几何变换的数学教育研究中十分流行。科学教育者正呼吁学者以新的方式看待学习轨迹或学习进阶的使用，这对数学教育者可能同样有所启示。正如文献所指出的：“学习进阶往往遮蔽了学习的社会过程，转而从个体认知的视角来看待学习。”考虑学习的社会面向，或许能帮助研究者追踪“一种实践在课堂共同体中被吸纳与转化的进程”。对实践以及认知与学习之社会维度的更多强调，也可能为文化相关性教学提供切入口。

（三）整合对称、变换与计算思维：一片充满前景的研究图景

尽管本综述只找到极少数明确把对称与变换同计算思维相整合的文章，但确有一些研究在可编程环境中使用了基元与抽象[69,70]，影响了学生对几何图形在变换下之运动的理解。这些探究开辟了一条通向计算融入数学课堂的路径。计算思维近年来在数学与科学教育领域重新引发的兴趣，已经重塑了当前的研究格局，表明这是一个亟待拓展的开放领域。

一项关于 K-12 数学教育中计算思维的范围综述印证了这一看法。该文作者指出，“明确把数学概念的学习与计算思维联系起来的研究并不多见”（第 65 页）。他们建议研究应聚焦于跨领域“有效实施整合课程的方式”，

并指出“研究团队必须调动能够跨越学科壁垒、同时又不贬损任何组成部分之重要性的专长”（第 66 页）。计算思维与数学思维之间的交叠十分重要，因为二者可以彼此增益，从而促成对数学观念的深化理解。

（四）课堂嵌入式研究：以参与式设计促成与几何变换和对称大概念的联结

展望未来，在承接文献之间的同时，我们建议变换研究领域应考虑构想新的教、学与研究方式，包括网络化的跨学科研究机会。作为这一研究的一部分，可以追问的一个问题是：学习者在理解数学变换时所经历的困难，是否有一部分在于要理解这里遇到的概念如何嵌入更大的数学结构与文化结构之中。

尽管所需资源相当可观，本综述仍提示：对于那些采用更整合的方法、从建构主义立场开展设计、并且理解学生有能力建构自己的数学观念（而不只是“映照外部教学表征所体现的那些观念”，文献，第 145 页）的研究者而言，课堂嵌入式研究能带来进一步的收益。这一理念尊重学习者的能力，并“意味着学生发展出高水平的智识自主性”（第 147 页）。学生的自主性使研究者得以观察学习者如何通过多重入口与观念相遇、按需拓展自己的学习、并与数学中的大概念相联结。这一取径也尊重数学学习中不同的文化取径，而它们可能存在于传统正典之外。

五、结论

鉴于让数学观念对所有学生都可及且有意义至关重要，我们建议，关于几何变换与对称的研究应在研究议程中占据更高的位置。这类研究可以拓展我们的思考：这些主题领域如何能提供与真实世界、与学生生活经验相联结的情境，又如何能支撑文化回应性教学法。这样的研究还可以拓宽我们关于学习轨迹的视野，鼓励纳入创新技术——例如数字与计算环境，以及用于学习的游戏。就学生的理解而言，几何认知中运动理解与映射理解之间的复杂关系，凸显了未来研究需要采用多元视角与多元方法，以丰富我们的理解，并支持跨越多元文化与多元认识论的包容性课堂。

与此同时，本综述也凸显了许多教师把学习轨迹 / 学习进阶作为教学脚手架的依赖。教师，尤其是职前数学教师，在设计与开发能够通达数学大概念的文化回应性教学策略时面临相当大的挑战。我们的发现进一步强调，需要在整合式教学取径中协助教师开展评价，因为传统的学习轨迹 / 学习进阶往往未能就如何从更整合的视角评估学习给出清晰指引。

从根本上说，本综述凸显了聚焦个体认知之研究的主导地位。尽管考虑社会与符号学取向的研究在过去十年有所增加，本综述仍指出：向更整体地理解学习环境这一更大范式转移蕴含着潜在价值。综述同时也凸显了利用可编程环境与计算思维的机会，提示探索如何驾驭跨技术、跨媒介之协同具有潜在价值。

关于对称与几何变换的研究传统长期强调全等与几何证明的形式性，培养了与课程目标相契合的扎实数学技能。然而，采纳克莱因埃尔朗根纲领所主张的关于平面的“运动到映射”观，提供了一种培育直觉的情境——这种直觉扎根于日常经验，并成为学习者建构映射观的基础。这一取径天然地得到计算环境所支持的离散可视化与运动动画的支撑。因此，探索虚拟离散空间如何促进（以及如何妨碍）学习过程，是一个开放而引人入胜的未来研究方向。

围绕课堂学习开展的、采用整合取径的研究——实践伙伴关系，也可以赋予学生与教师能动性。传统上，动态几何环境被用来约束学生按既有的数学规则操纵系统，无意间排除了他们主动投入几何思维之发展的机会。在这种情况下，技术成了一种外部权威——学习轨迹往往也是如此。当教学活动与决策的权威被让渡给非人格化的外部实体时，教师可能感到自己不能偏离既定的学习结果顺序，从而在构想与学生一起探索数学的创造性方式上受到限制。

最后,把变换研究拓展到那些研究不足的观念上——既包括数学教育内部的(如空间推理、公平与机会),也包括传统数学研究谱系之外的(如计算思维、原住民视角,以及 STEM 中的学科实践)——或许能够“拓展可能”,从而使关于变换的学习拓宽我们对数学学习本身的思考,以更好地服务于所有学生。

参考文献

- [1] 刘昌亚. 义务教育课后服务长效管理机制. 基础教育, 2021(08): 14-18.
- [2] 丁钢. 传统文化融入现代教育的路径探索. 华东师范大学学报 (教育科学版), 2021, 39(04): 1-10.
- [3] 许晓东. 高校实验室育人功能挖掘. 实验技术与管理, 2021, 38(07): 210-215.
- [4] 沈建华. 劳动教育课程体系开发与实践. 中国教育学刊, 2021(09): 84-88.
- [5] Kalinec-Craig C, Prasad P V, Luna C. Geometric transformations and Talavera tiles: A culturally responsive approach to teacher professional development and mathematics teaching. *Journal of Mathematics and the Arts*, 2019, 13(1-2): 72-90.
- [6] Stewart I. *Why beauty is truth: A history of symmetry*. Basic Books, 2008.
- [7] 彭刚. 通识教育课程体系优化建设. 清华大学教育研究, 2021, 42(03): 1-8.
- [8] 孙杰远. 民族地区教育现代化推进策略. 广西师范大学学报 (哲学社会科学版), 2021, 59(03): 108-115.
- [9] 焦建利. 微课赋能课堂教学创新. 中国信息技术教育, 2021(16): 18-22.
- [10] 王璐. 境外基础教育改革经验借鉴. 外国教育研究, 2021, 48(07): 3-16.
- [11] 田慧生. 区域教育治理现代化建设路径. 教育科学研究, 2021(08): 5-11.
- [12] 庞丽娟. 学前普惠教育扩容提质路径. 学前教育研究, 2021(07): 3-13.
- [13] 赵国忠. 校长领导力提升实践策略. 教学与管理, 2021(24): 11-14.
- [14] 陈劲. 研究生科研创新能力培养模式. 研究生教育研究, 2021(04): 45-51.
- [15] Goldenberg E P, Cuoco A A, Mark J. A role for geometry in general education // Lehrer R, Chazan D. *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. Mahwah: Routledge, 1998: 3-44.
- [16] Driscoll M. *Fostering geometric thinking: A guide for teachers, grades 5-10*. Portsmouth: Heinemann, 2007.
- [17] Gutiérrez Á, Leder G, Boero P. *The second handbook of research on the psychology of mathematics education*. Sense Publishers, 2016.